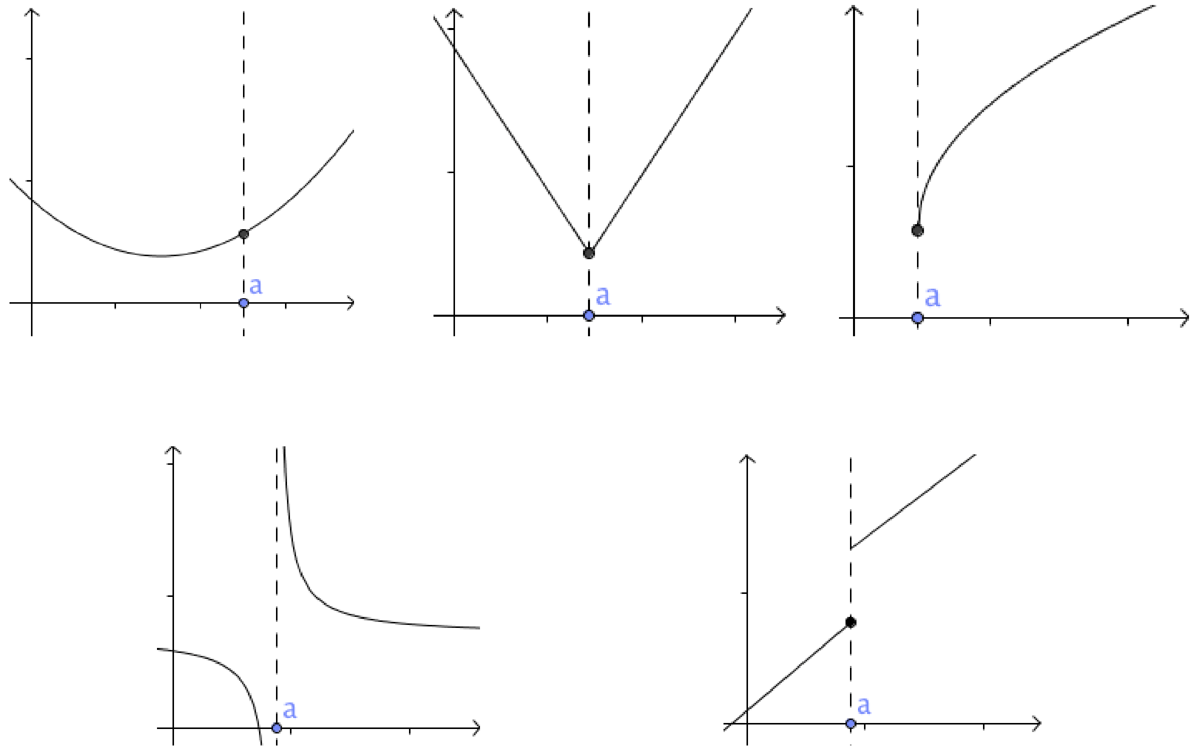
I. Notion de continuité

<u>Exemples et contre-exemples :</u>



La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

<u>Théorème</u> : Toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

CONSÉQUENCES :
On admettra les deux propriétés suivantes :

- Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

<u>Exemple d'exercice sur la continuité</u>

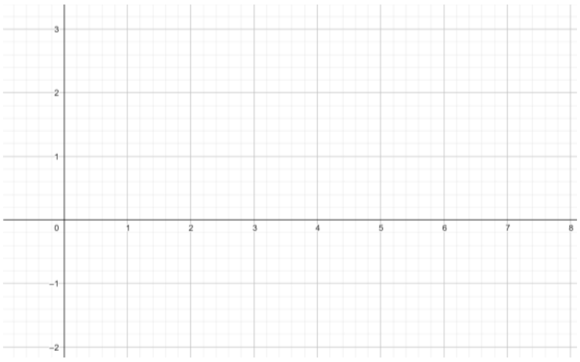
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2, \ pour\ x < 3. \\ x-4, \ pour\ 3 \leq x < 5 \\ -2x+13, \ pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \longmapsto -x+2$, $x \longmapsto x-4$ et $x \longmapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty\,;3[$, sur $[3\,;\ 5[$ et sur $[5\,;\ +\infty[$.

On peut tracer la fonction f sur $]-\infty\,;5[$ sans lever le crayon, elle est donc continue sur cet intervalle. Il en est de même sur l'intervalle $[5\,;\,+\infty[$.

Par contre, il n'est pas possible de franchir ces deux intervalles sans lever le crayon. La fonction f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.



La fonction f est ainsi continue sur ……………………………………

II. Valeurs intermédiaires

1) Solution d'une équation du type $f(x) = k$

Exemples : Il est possible de lire sur le tableau de variations, le nombre de solution(s) éventuelle(s) de chacune des équations ci-dessous et encadrer au mieux ces solutions.

a) $f(x) = 18$

b) $f(x) = 0$

c) $f(x) = -3$

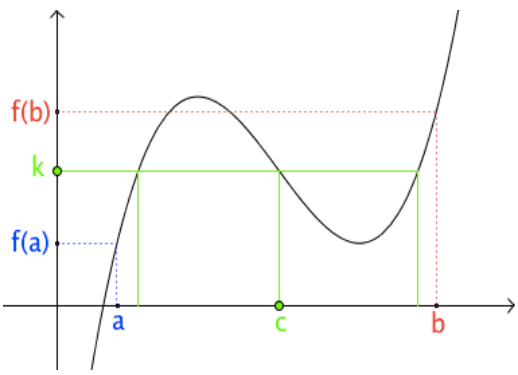
d) $f(x) = 3$

x	-4		-3		-1		1
f	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

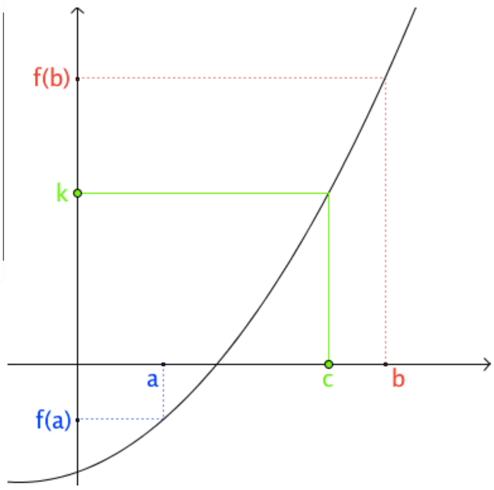
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.
- Admis -



Cas particuliers :
Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** c dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



REMARQUES

1. Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a;b]$
2. Le théorème s'applique aussi lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme $[a;b[$, $]a;b]$, $]a;b[$, $[a;+\infty[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$.
3. Le théorème n'indique pas comment déterminer cette solution. On utilisera la table de la calculatrice - méthode de DICHOTOMIE.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2{,}5\ ;\ 5]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

Exercices : n° 22, 23 page 69 + n° 47 page 72 + n° 72, 74 page 74 + n° 76 page 75.